

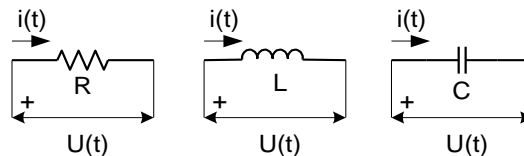
Elektrotehnika i elektronika - II test

grupa 1

Teorijska pitanja:

P1. Napisati matematičku formulaciju i iskazati rečima: a) Amperov zakon o cirkulaciji vektora \mathbf{B} u vakuumu [2], b) Lorencovu silu [2], c) zakon o konzervaciji magnetskog fluksa [2], d) Faradejev zakon elektromagnetne indukcije [2].

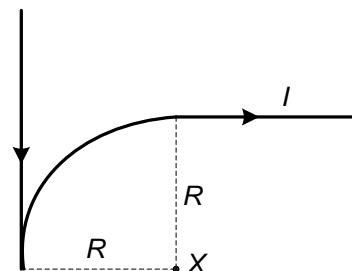
P2. Otpornik R , kalem L i kondenzator C , prikazani na slici, priključeni su na isti napon $u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t)$. Napisati izraz za struju kroz svaku od ovih komponenti u kompleksnom i vremenskom domenu, ponaosob [6].



P3. Nacrtati trougao impedanse i trougao snage i obavezno definisati sve korišćene oznake [3]. Kako se definišu aktivna, reaktivna i prividna snaga prijemnika u ustaljenom prostoperiodičnom režimu [3]?

Zadaci:

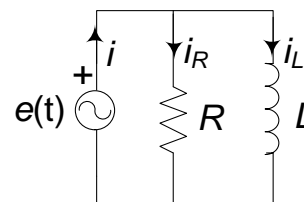
Z1. Odrediti vektor magnetske indukcije \mathbf{B} [6] u tački X koja leži u ravni tankog, neograničenog provodnika sa vremenski konstantnom strujom $I = 2/(5\pi)[A]$ u položaju kao na slici. Poznato je $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} [H/m]$ i $R = 2[cm]$.



Z2. Redna veza neopterećenog kondenzatora kapacitivnosti C i otpornika otpornosti R povezuje se zatvaranjem prekidača, u trenutku $t=0$, na idealnu bateriju elektromotorne sile E . Odrediti napon kondenzatora $u(t)$ [2] i struju otpornika $i(t)$ [2] tokom prelaznog procesa. Kolika je elektrostatička energija kondenzatora u ustaljenom stanju [2] i kada se prelazni proces može smatrati završenim [2]? Poznato je $C=1[\mu F]$, $R=10[\Omega]$ i $E=10[V]$.

Z3. U RL mreži na slici uspostavljen je ustaljeni prostoperiodični režim. Ako je $R=10[\Omega]$ i $e(t) = 10\sqrt{2}\sin(40t)[V]$ odrediti:

- a) induktivnost L da efektivne vrednosti struja i_L i i_R budu jednake [2]
- b) trenutne vrednosti struja $i_L(t)$, $i_R(t)$ i $i(t)$ [3].
- c) aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu ove mreže [3].



Z4. a) Redna veza otpornosti R i induktivnosti L priključena je na prostoperiodični naponski izvor ems E , kružne frekvencije ω i unutrašnjeg otpora R_g . Nacrtati električnu šemu ovog kola [2]. Objasni kako se menja efektivna vrednost struje izvora kada kružna frekvencija elektromotorne sile izvora raste [2]?

b) Aktivna snaga neke impedanse je $16[W]$, a reaktivna $12[VAr]$. Moduo ove impedanse iznosi $5[\Omega]$. Odrediti ovu impedansu [4].

P2. $u(t) = U\sqrt{2} \sin(\omega t)$, $\bar{U} = U \angle 0$. $\bar{I}_R = \frac{\bar{U}}{R} = \frac{U}{R}$, $i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U}{R} \sqrt{2} \sin(\omega t)$.

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{U}}{j\omega L} = -j \frac{U}{\omega L} = \frac{U}{\omega L} e^{-j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow i_L(t) = \frac{U}{\omega L} \sqrt{2} \sin(\omega t - \pi/2).$$

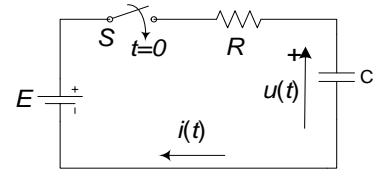
$$\bar{I}_C = j\omega C \bar{U} = \omega C U e^{j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow i_C(t) = \omega C U \sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/2).$$

Z1. S leva u desno, u smeru toka struje, postoje 3 segmenta: $B_1 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} [\sin 0 - \sin(-\pi/2)] = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$,

$$B_2 = \frac{1}{4} \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{8R} \text{ i } B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} [\sin(\pi/2) - \sin 0] = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \text{ u odnosu na referentni smer } \otimes \text{ u tački } X.$$

Dakle $B_r = B_1 + B_2 + B_3 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{8R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{2}{5\pi} = \frac{1}{10} 10^{-5} [\text{T}] = 1 [\mu\text{T}]$

Z2. Napon $u(t \geq 0)$, uz početni uslov $u(0^-) = u(0^+) = 0 [\text{V}]$, određuje se iz diferencijalne jednačine: $E = Ri(t) + u(t)$, $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$.



$$E = RC \frac{du(t)}{dt} + u(t), \quad \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u(t) = \frac{E}{RC}$$

Rešenje je zbir homogenog i partikularnog rešenja: $u(t) = u_h(t) + u_p(t)$. $u_p(t) = U_p = \text{const.}$ Zamenom dobijamo $\frac{dU_p}{dt} + \frac{1}{R \cdot C} U_p = \frac{E}{R \cdot C}$. Kako je $\frac{dU_p}{dt} = 0$, $\frac{1}{R \cdot C} U_p = \frac{E}{R \cdot C}$, tj. $u_p(t) = U_p = E$.

Homogeno rešenje je oblika $u_h(t) = Ae^{st}$. $\frac{du_h(t)}{dt} + \frac{1}{R \cdot C} u_h(t) = 0$, $\frac{d}{dt} [Ae^{st}] + \frac{1}{R \cdot C} Ae^{st} = 0$

$sAe^{st} + \frac{1}{RC} Ae^{st} = 0$, $s = -\frac{1}{RC}$. Rešenje je oblika $u(t) = u_h(t) + u_p(t) = Ae^{-\frac{1}{RC}t} + E$. Početni uslov

$$u(0) = 0 \Rightarrow Ae^{-\frac{1}{RC} \cdot 0} + E = 0 \Rightarrow A + E = 0 \Rightarrow A = -E.$$

Konačno, napon na kondenzatoru je $u(t) = E(1 - e^{-t/RC}) = 10(1 - e^{-10^5 t}) \text{ V}, t \geq 0$.

Struja otpornika i kondenzatora je: $i(t) = C \frac{d}{dt} u(t) = CE \frac{1}{RC} e^{-t/RC} = \frac{E}{R} e^{-t/RC} = 1e^{-10^5 t} \text{ A}, t \geq 0$.

$W_C = \frac{1}{2} C \cdot u^2(\infty) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 10^2 = 50 [\mu\text{J}]$ je elektrostatička energija kondenzatora u ustaljenom stanju.

Prelazni proces je završen nakon $5\tau = 5RC = 5 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^{-5} = 50 [\mu\text{s}]$.

Z3. Naponi na kalemu i otporniku jednaki su elektromotornoj sili izvora $e(t)$. Ako su efektivne vrednosti struja jednake važi $|\bar{I}_L| = |\bar{I}_R|$, tj. $|\bar{E} / j\omega L| = |\bar{E} / R|$, sledi $E / \omega L = E / R$, pa se dobija $\omega L = R \Rightarrow L = R / \omega = 10 / 40 = 1 / 4 = 0.25 [\text{H}]$. Sada je:

$$\bar{I}_L = \bar{E} / j\omega L = 10 / (j40 \cdot 0.25) = 1 / j = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}} = 1 \angle -\frac{\pi}{2} [\text{A}], \quad i_L(t) = \sqrt{2} \cdot \sin(40t - \pi/2) [\text{A}].$$

Analogno $\bar{I}_R = \bar{E} / R = 10 / 10 = 1 [\text{A}]$, $i_R(t) = \sqrt{2} \cdot \sin(40t) [\text{A}]$. Fazor struje izvora je $\bar{I} = \bar{I}_L + \bar{I}_R$,

$$\bar{I} = -j + 1 = [\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot e^{j \arctg \frac{-1}{1}}] = \sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \angle -\frac{\pi}{4} \text{ A}, \quad i(t) = 2 \cdot \sin(40t - \pi/4) [\text{A}]. \text{ Kompleksna}$$

snaga izvora je $\bar{S} = \bar{E} \cdot \bar{I}^* = 10 \cdot [1 - j]^* = 10(1 + j) = 10 + j10 = P + jQ$. Kako je $\bar{S} = P + jQ$, to je

$$P = 10 [\text{W}], \quad Q = +10 [\text{VAr}] \text{ i } S = 10\sqrt{2} [\text{VA}].$$

Z4. a) $\bar{Z}_U = R_g + R + j\omega L = \sqrt{(R_g + R)^2 + (\omega L)^2} \cdot e^{j \arctg \varphi} = Z e^{j \arctg \varphi}$. $\bar{I} = \bar{E} / \bar{Z}$, odnosno $I = E / Z$.

Sa porastom ω rastu impedansa kalema i ukupna impedansa kola pa efektivna vrednost struje I opada.

b) $S = I^2 Z = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20[\text{VA}]$, $I = \sqrt{S / Z} = \sqrt{20 / 5} = 2[\text{A}]$. $P = RI^2 = 16[\text{W}]$
 $R = P / I^2 = 16 / 4 = 4[\Omega]$. $Q = XI^2 = 12[\text{VAR}]$, $X = Q / I^2 = 12 / 4 = 3[\Omega]$. $Z = R + jX$,
tj. $Z = (4 + j3)\Omega$.